

Организация проектно-аналитической работы при создании информационных систем

Лекция 4

Часовских А.А.

Говорко А.А.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ

Имитационное моделирование бизнес-процессов (структурный подход)

Задача: «качество» структуры

- наличие «узких мест»
- могут ли возникать ошибки или аварии, обусловленные структурными особенностями системы
- возможность приведения системы в неработоспособное состояние («тупиковых» ситуаций)
- возможности оптимизации (в первую очередь, упрощения) структуры

Исполнение операций предметной области или изменение состояния элементов системы –
События (→ Действия → Процесс)

Условия – возможность реализации события (предусловия) или результат реализации события (постусловия). «Емкость» условия: 0, если условие не выполнено, 1, если условие выполнено, и $n > 1$, если условие выполнено «с n -кратным запасом».

Асинхронность (отсутствие дискретного времени и концентрация не на последовательности состояний, а на связях - зависимостях между событиями)

События [реализуются в виде] действия

Условия. Наличие условий позволяет совершиться событию, которое при реализации изменяет другие условия.

CASE-средства

- Microsoft Visio + Fundamental Modeling Concepts (FMC) Stencils
- BPWin - AllFusion Process Modeller - CA [ERWin] Process Modeller
- Design/IDEF - Design/CPN - CPN Tools
- AnyLogic и другие (дискретно-событийный подход)

Математический инструмент

Пусть (P, T, F) – конечная сеть (т.е. множество $X = P \cup T$ конечно). В ней

- $P \neq \emptyset$ - множество «мест»;
- $T \neq \emptyset$ - множество «переходов»;
- $P \cap T = \emptyset$;
- $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ - отношение инцидентности;
- $F \neq \emptyset$ и $\forall x \in P \cup T \exists y \in P \cup T \mid xFy \vee yFx$ (любой элемент инцидентен хотя бы одному элементу другого типа);
- для $p \in P$ обозначим через p^+ множество его «входов» (т.е. $\{t \in T \mid tFp\}$), а через p^- множество его «выходов» (т.е. $\{t \in T \mid pFt\}$), тогда в рассматриваемой сети для любых $p_1, p_2 \in P$ верно утверждение $(p_1^+ = p_2^+) \wedge (p_1^- = p_2^-) \Rightarrow p_1 = p_2$ (никакие два места не имеют общего множества переходов).

Сеть Петри (1/3)

Определение. Сеть Петри $N=(P,T,F,W,M_0)$ - взвешенный ориентированный двудольный граф, множество вершин которого состоит из двух непересекающихся множеств: множества мест P , интерпретируемых как «условия», и множества переходов T , интерпретируемых как «события».

Дуги интерпретируются как «зависимости» (непосредственные причинно-следственные связи), дуга из вершины x в вершину y существует тогда и только тогда, когда xFy .

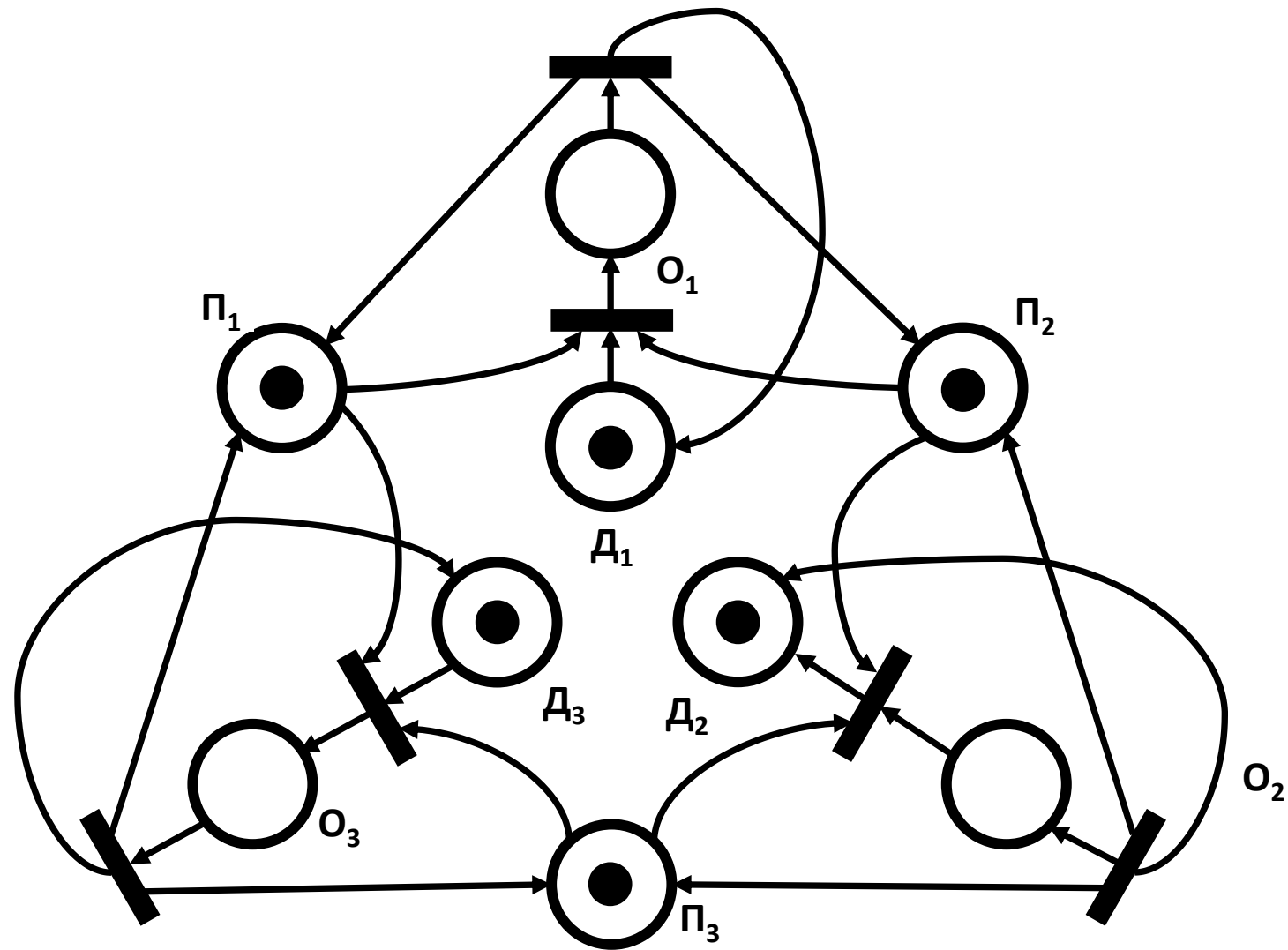
Весовая функция $W:F\rightarrow\mathbb{N}$ сопоставляет каждой дуге число $n>0$, называемое «кратностью дуги» (если кратность всех дуг равна 1, то сеть называется «ординарной»).

Весовая функция $M_0:P\rightarrow\mathbb{N}\cup\{0\}$ сопоставляет каждому месту $p\in P$ «разметку места» - некоторое число $M_0(p)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ (если, $M(p_i)=0$ то условие не выполнено, иначе – выполнено с некоторой емкостью).

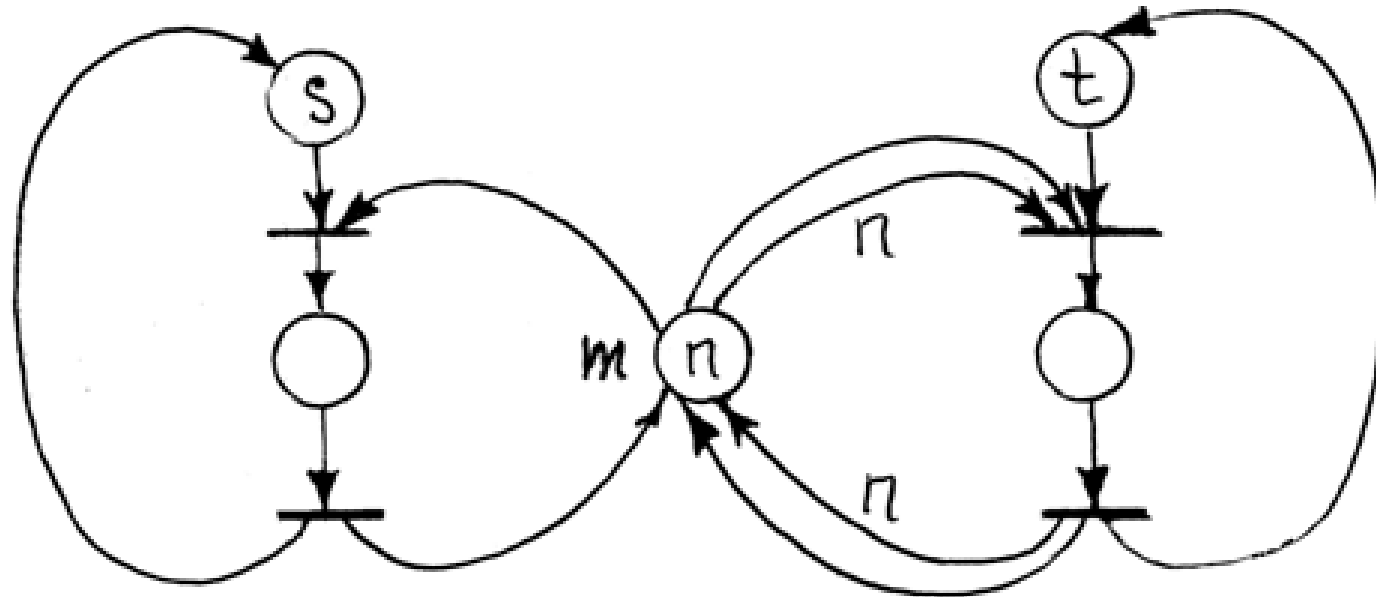
Функция инцидентности:

$$F(x, y) = \begin{cases} n, & \text{если } xFy \wedge (W(x, y) = n), \\ 0, & \text{если } \neg(xFy). \end{cases}$$

Задача об обедающих мудрецах



Задача о чтении/записи



Сеть Петри (2/3)

Разметка сети N – функция $M:P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$. Или вектор $M=(m_1, \dots, m_n)$, если упорядочить P .

Непосредственное следование, достижимость разметки: последовательность разметок M, M_1, M_2, \dots, M' и слово $\tau = t_1 t_2 \dots t_k$ в алфавите T такие, что $M[t_1 \rangle M_1[t_2 \rangle M_2[t_k \rangle M'$.

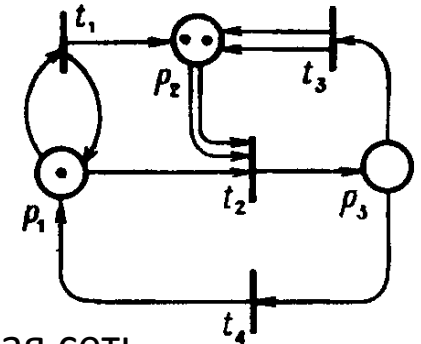
Множество достижимых разметок $R(N)=R(N, M_0)$ - множество всех разметок, достижимых в сети N от начальной разметки. Граф разметок – вершины из $R(N)$, дуги - переходы.

Свободный язык сети - множество $L(N)=\{\tau \in T^* \mid \exists M \in R(N): M_0[\tau \rangle M\}$ (здесь T^* - множество всех слов в алфавите T).

Место p называется **ограниченным**, если существует n такое, что для любой достижимой разметки M верно неравенство $M(p) \leq n$.

Сеть называется ограниченной, если каждое ее место ограничено.

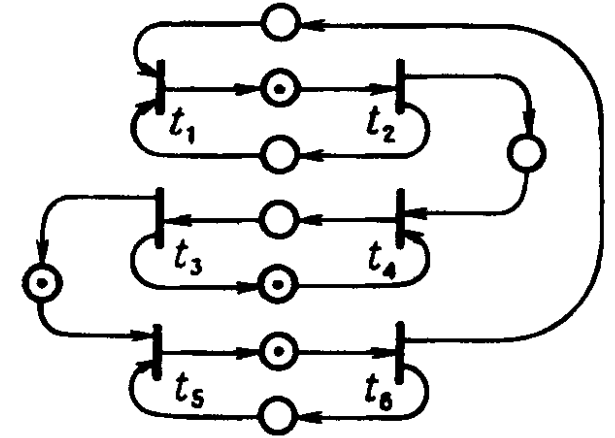
Множество достижимых разметок $R(N)$ конечно тогда и только тогда, когда N - ограниченная сеть.



Сеть Петри (3/3)

Место p называется **безопасным**, если оно ограничено при $n=1$.
Сеть безопасна, если все ее места безопасны.

В **консервативной** сети суммарное количество фишек во всех ее местах остается неизменным для любой достижимой разметки.



Переход t **потенциально живой** при некоторой разметке M , если существует достижимая от M разметка M' , при которой переход t может сработать. Если $M=M_0$, то переход потенциально живой в сети N .
Переход живой, если он потенциально живой при любой достижимой в сети разметке. Сеть является живой, если все ее переходы живы.

Переход **мертвый** при M , если он не является потенциально живым при M . Переход мертвый, если он мертв при любой достижимой разметке.

Переход t **потенциально мертвый**, если существует $M \in R(N)$ такая, что при любой разметке $R(N, M)$ переход t не может сработать.

Разметка M при этом t -тупиковая. Если разметка t -тупиковая для любых $t \in T$, то она **тупиковая**.

Помеченные сети Петри. Классы языков.

Помеченные сети Петри: пара (N, Σ) , где N - сеть, $\Sigma: T \rightarrow A$ - помечающая функция над некоторым алфавитом A . Если Σ - частичная функция и не все переходы помечены, то непомеченным сопоставляется «пустой» символ λ (т.н. λ -переход). Очевидное расширение на последовательности: $\Sigma(\tau t) = \Sigma(\tau)\Sigma(t)$, при этом $\Sigma(\lambda) = \lambda$, где λ - пустое слово.

Если $\tau \in T^*$ - последовательность срабатываний в сети N , то $\Sigma(\tau) \in A^*$ - помечающая последовательность в помеченной сети (N, Σ) . Если $L(N)$ - свободный язык сети N , то множество $\{\Sigma(\tau) \mid \tau \in L(N)\}$ образует **префиксный язык** помеченной сети (N, Σ) .

Подмножество свободного языка сети $L(N, M_f) = \{\tau \in T^* \mid M_0[\tau)M_f\}$, где M_f терминальная, – **свободный терминальный язык** сети N . Множество $\{\Sigma(\tau) \mid \tau \in L(N, M_f)\}$ – **терминальный язык** помеченной сети.

Пусть \mathcal{N} - класс всех сетей Петри. \mathcal{L}^λ - класс префиксных языков (все префиксные языки всех помеченных сетей, образованных из сетей класса \mathcal{N} посредством произвольных помечающих функций над произвольными алфавитами), класс терминальных языков \mathcal{L}_0^λ , аналогично \mathcal{L} и \mathcal{L}_0 (без λ -переходов).

Стандартная форма сети Петри

1. Выделено специальное «включающее» место on с начальной разметкой $M_0(on)=1$, начальная разметка всех остальных мест равна 0.
2. Терминальный язык сети определяется всегда для одной и той же терминальной разметки $M_f = \bar{0}$ (нулевой вектор длины $|P|$).
3. Каждый переход сети имеет хотя бы одно входное место (т.е. нулевая разметка – тупиковая).

Лемма. Для любой помеченной сети (N, Σ) и любой терминальной разметки M_f этой сети существует представленная в стандартной форме помеченная сеть (N', Σ') такая, что $L(N', \Sigma') = L(N, \Sigma)$ и $L(N', \Sigma', \bar{0}) = L(N, \Sigma, M_f)$.

3. новое место q (вход и выход). $M_0(q) = 1, M_f(q) = 1$

1. для всех t , которые могут сработать при M_0 , добавляем t' с входами из on , выходы так, чтобы $F^-(t') = M_0 - F^+(t) + F^-(t)$, пометка $\Sigma(t') = \Sigma(t)$

2. для всех t , которые могут сработать последними перед M_f , добавляем t'' с входами так, чтобы $F^+(t'') = M_f - F^-(t) + F^+(t)$, без выходов, пометка $\Sigma(t'') = \Sigma(t)$

Для переходов t таких, что $M_0[t)M_f$, добавляется переход t''' с входом on , без выходов, с пометкой $\Sigma(t''') = \Sigma(t)$

Теорема. $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0, \mathcal{L}^\lambda \subset \mathcal{L}_0^\lambda, \mathcal{L} \subset \mathcal{L}^\lambda, \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_0^\lambda$.

Выразительная мощность (1/3)

Порождающая грамматика – набор (A, V, Π, S_0) .

- A – алфавит терминальных символов,
- V – алфавит нетерминальных символов,
- Π – конечное множество продукций (правил подстановки),
- S_0 – начальный символ.

Продукция имеет вид $\alpha \rightarrow \beta$, где $\alpha \in V^*$, $\beta \in (A \cup V)^*$ и переводит слово $\delta_1 \alpha \delta_2$ в $\delta_1 \beta \delta_2$.

Язык, порождаемый грамматикой, – это множество всех терминальных слов (из A^*) выводимых из S_0 с помощью Π .

- Рекурсивно перечислимые языки
- Контекстно-зависимые языки - каждая продукция в Π имеет вид
$$\alpha_1 S \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2; S \in V; \alpha_1, \alpha_2 \in V^*; \beta \in (A \cup V)^*$$
- Контекстно-свободные языки - каждая продукция в Π имеет вид $S \rightarrow \beta; S \in V; \beta \in (A \cup V)^*$
- Регулярные языки - каждая продукция в Π имеет вид
$$S \rightarrow S' \beta \text{ или } S \rightarrow \beta S'; \text{ где } S - \text{ пустой символ или } S \in V; \beta \in (A \cup V)^*$$

Выразительная мощность (2/3)

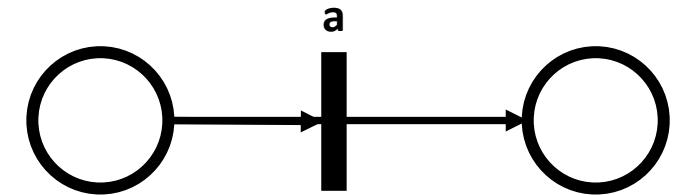
Регулярные языки vs языки сетей Петри

Конечный автомат

- A – алфавит
- Q – конечное непустое множество состояний ($Q \cap A = \emptyset$), выделены начальное q_0 и конечное q_f состояния
- I – программа автомата, множество команд (слов) вида $qa \rightarrow q'$ ($q, q' \in Q, a \in A$), для любой пары (q, a) существует единственная такая команда.

Теорема. $\mathcal{L}_a \subset \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_a \subset \mathcal{L}$.

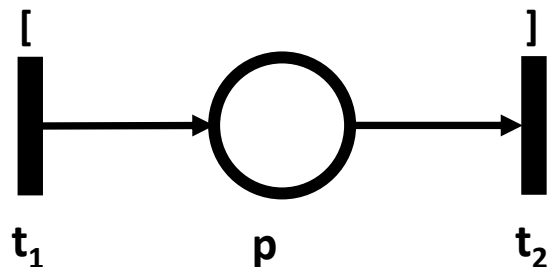
1. Преобразование автомата в сеть Петри, $\mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{L}$



2. Существуют терминальные языки сетей Петри, не являющиеся регулярными.

Скобочный язык

- $S_0 \rightarrow S_0 S_0$
- $S_0 \rightarrow [S_0]$
- $S_0 \rightarrow \lambda$



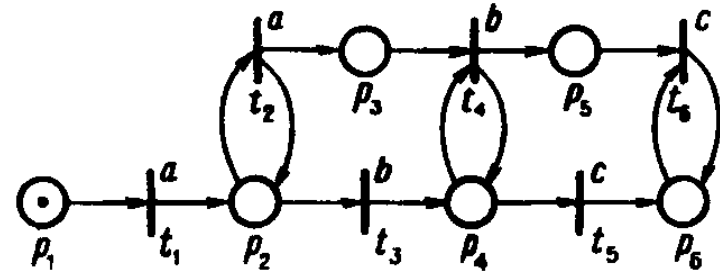
Префиксный скобочный язык

- $S_0 \rightarrow S_0 S_0$
- $S_0 \rightarrow [S_0]$
- $S_0 \rightarrow [S_0$
- $S_0 \rightarrow \lambda$

Выразительная мощность (3/3)

Лемма. Существует терминальный язык, порождаемый помеченной сетью Петри, и не являющийся контекстно-свободным.

Язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не является контекстно-свободным.
Сеть на рисунке порождает его для $M_f = (0, 0, 0, 0, 1)$.



Лемма. Существует контекстно-свободный язык, не порождаемый ни одной помеченной сетью Петри.

Контекстно-свободный язык L в алфавите $\{a, b, c\}$:

$S_0 \rightarrow S_0 c S_0$

$S_0 \rightarrow S$

$S \rightarrow S S$

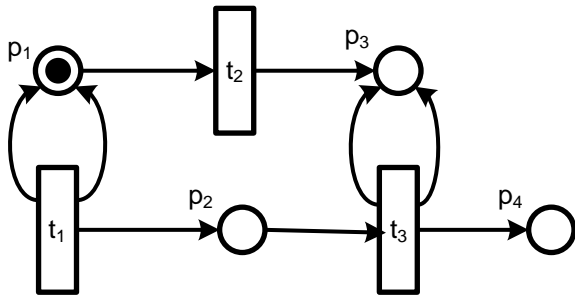
$S \rightarrow a S b$

$S \rightarrow \lambda$

Теорема. Класс помеченных сетей Петри строго мощнее класса конечных автоматов, не сравним с классом магазинных автоматов и строго менее мощен, чем класс машин Тьюринга.

(В смысле порождаемых ими формальных языков.)

Покрывающее дерево (1/3)



Если $\tau \in L(N)$ такова, что $\tau = \tau_1 \tau_2$ и

$$(M_0[\tau_1]M_1) \wedge (M_1[\tau_2]M_2) \wedge (M_2 \geq M_1) \wedge (M_2(p) > M_1(p)),$$

то для любого n последовательность $(\tau_1 \tau_2^n) \in L(N)$.

Например, для $p_2 : \tau = \lambda t_1$, $M_0 = (1,0,0,0)$, $M_1 = (1,1,0,0)$

Для p_4 последовательности вида $t_1^n t_2 t_3^n$ - срабатываний t_3 не больше, чем t_1 .

Разметка $\bar{M} \in \mathbb{N}_\omega^{|P|}$

$$\mathbb{N}_\omega = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\omega\}, \omega : \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\omega > n$$

$$\omega + n = n + \omega = \omega + \omega = \omega - n = \omega - \omega = \omega$$

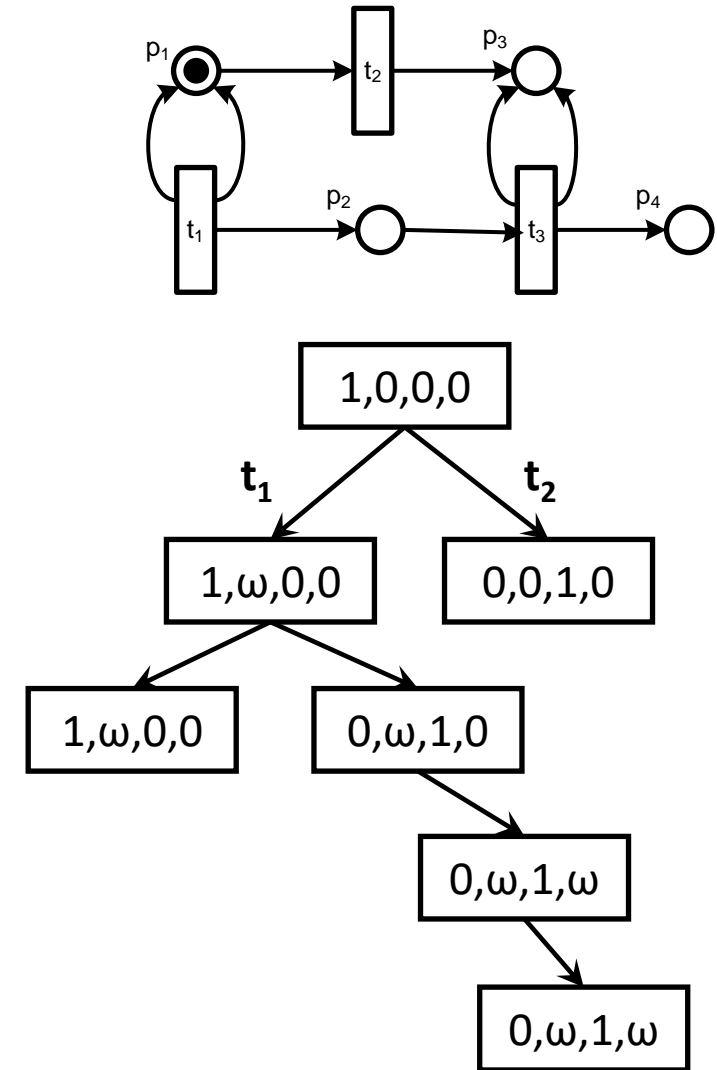
$$\omega \cdot n = n \cdot \omega = \omega$$

$$\omega \cdot 0 = 0 \cdot \omega = 0$$

Покрывающее дерево (2/3)

Алгоритм.

1. Единственная вершина M_0 и нет дуг.
2. M – не лист, но нет исходящих дуг. Тогда
 - a) Ни один из переходов не может сработать, $\forall t \in T: M \not\geq F^+(t)$. Тогда M – лист.
 - b) На пути из корня в M существует M' такая, что $M=M'$. Тогда M – лист.
 - c) На пути из корня в M существует M' такая, что $M' < M$. Тогда $\forall p \mid M'(p) < M(p)$ значение $M(p)$ заменяем на ω и M – ω -лист.
 - d) Иначе, M – внутренняя вершина. $\forall t \in T \mid M \geq F^+(t)$ добавляется $M' = M - F^+(t) + F^-(t)$ и дуга (M, M') , помеченная t .
3. Если M – ω -лист, то строится покрывающее дерево сети N' , полученной из N заменой M_0 на M , корень совмещается с M в основном дереве. Процедура повторяется, пока не исчезнут ω -листья.



Покрывающее дерево (3/3)

Теорема. Для любой сети N ее покрывающее дерево конечно.

Доказательство. Предположим, что бесконечно.

Из каждой вершины исходит дуг не больше, чем переходов в сети. Т.е. дерево локально конечное.

По Лемме Кёнига существует бесконечная цепь с началом в корне, а по Лемме 2 в ней можно выделить бесконечную цепь векторов разметок из \mathbb{N}_ω^n .

В этой цепи существуют разметки M и M' такие, что $M'[\tau)M$ и $M \geq M'$. Тогда, по построению, M – лист, что противоречит предположению о бесконечности пути.

Лемма 1 (Кёниг 1936). Пусть G - связный локально конечный бесконечный граф; тогда для любой его вершины v существует бесконечная в одну сторону простая цепь с начальной вершиной v .

Доказательство. Если z - произвольная вершина графа G , отличная от v , то существует нетривиальная простая цепь от v до z ; отсюда следует, что в G имеется бесконечно много простых цепей с начальной вершиной v . Поскольку степень v конечна, то бесконечное множество таких простых цепей должно начинаться с одного и того же ребра. Если таким ребром является (v, v_1) , то, повторяя эту процедуру для вершины v_1 , получим новую вершину v_2 и соответствующее ей ребро (v_1, v_2) . Продолжая таким образом, получим бесконечную в одну сторону простую цепь (v, v_1, v_2, \dots) .

Лемма 2. Любое бесконечное подмножество \mathbb{N}_ω^n содержит бесконечную цепь.

Разрешимость проблем

Теорема. Проблема ограниченности сети Петри разрешима.

Если покрывающее дерево содержит лист с разметкой M , содержащей ω , то сеть не ограничена, т.к. существует (по построению) внутренняя вершина M' и последовательность τ такие, что $(M'[\tau]M) \wedge (M > M')$. Последовательность τ может повторяться сколь угодно большое число раз.

Теорема. Для произвольной сети Петри разрешимы проблемы

- ограниченности некоторого места;
- безопасности сети Петри;
- потенциальной живости перехода.

Теорема. Существуют алгоритмы, позволяющие

- установить для произвольного вектора $M \in \mathbb{N}_{\omega}^n$, является ли он тупиковым для перехода t в сети;
- узнать, получит ли данное место в сети хотя бы одну фишку;
- узнать, может ли данный переход сработать неограниченное число раз.

Теорема. Проблема R-включения / R-эквивалентности, т.е. установить для двух сетей с одним и тем же (или изоморфным) множеством мест факт $R(N_1) \subseteq R(N_2)$ или $R(N_1) = R(N_2)$ не является разрешимой.

10-я проблема Гильберта сводится к проблеме включения «графов полиномов»

$g(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid z \leq f(x_1, \dots, x_n)\}$, которая сводится к включению разметок сетей Петри, «слабо вычисляющая полиномы»: $N(y_1, \dots, y_n) = z$, где $0 \leq z \leq f(y_1, \dots, y_n)$.

Подклассы сетей Петри (1/3)

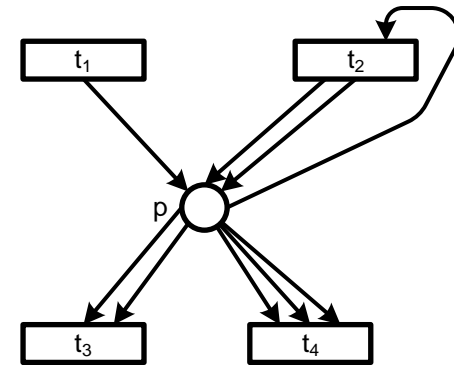
Ординарные сети Петри. Кратность всех дуг равна 1.

Алгоритм Хака (M. Hack) преобразования произвольной сети Петри $N=(P,T,F,W,M_0)$ в ординарную сеть $N'=(P',T',F',W',M'_0)$.

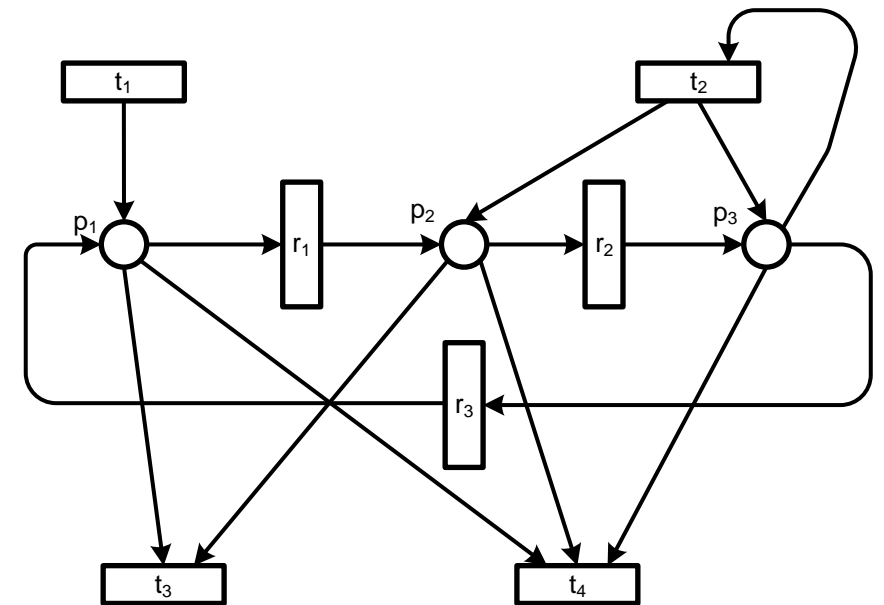
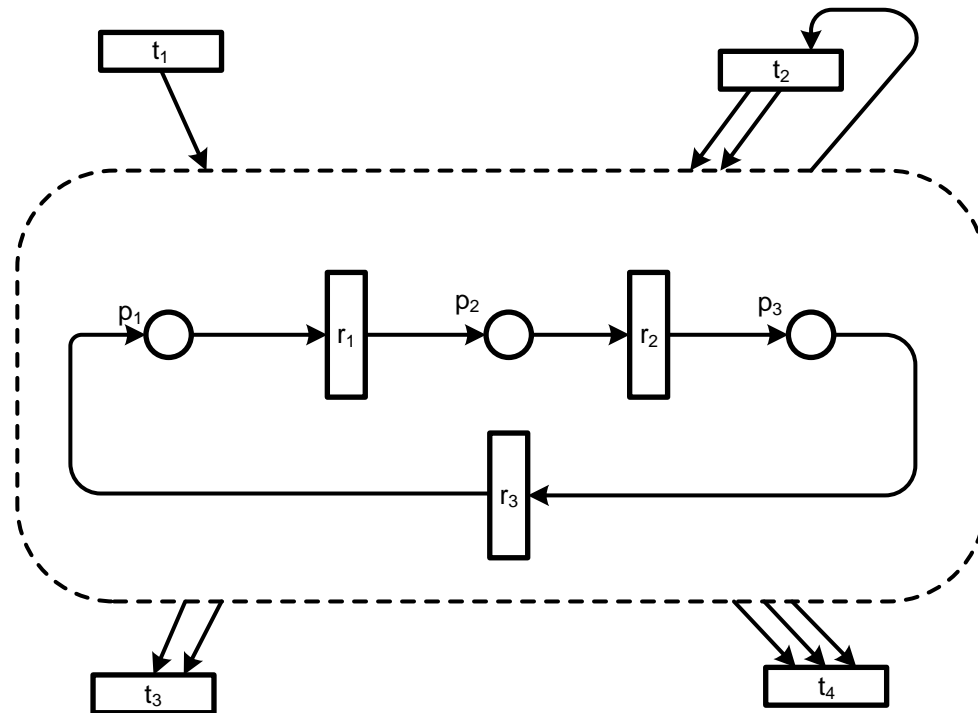
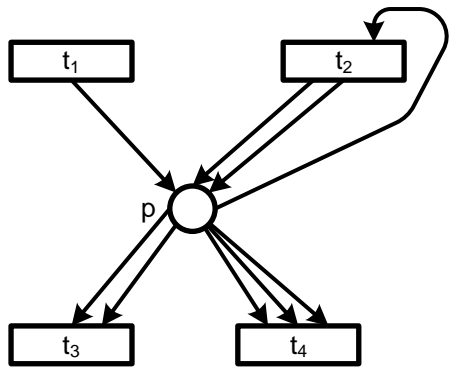
1. Для каждого места определяется максимальная кратность/количество $n(p)$ инцидентных ему дуг (любого направления).
2. Каждому месту $p \in P$ будет соответствовать в сети N' множество $P'(p) = \{p'_1, p'_2, \dots, p'_{n(p)}\}$ из $n(p)$ мест.
3. Множество переходов $T'(p) = \{r_1, \dots, r_{n(p)}\}$ связывает добавленные места из множества $P'(p)$ в «кольцевую» подсеть и

$$T' = T \cup \left(\bigcup_{p \in P} T'(p) \right)$$

4. Дуги соединяются произвольно при условии единичной кратности.
5. Начальная разметка $M'_0(p)$ места $p_i \in P'(p)$ в сети N' :
 $M'_0(p_1) = M_0(p)$, $M'_0(p_i) = 0$ для $i > 1$.



Подклассы сетей Петри (1/3) – рисунки



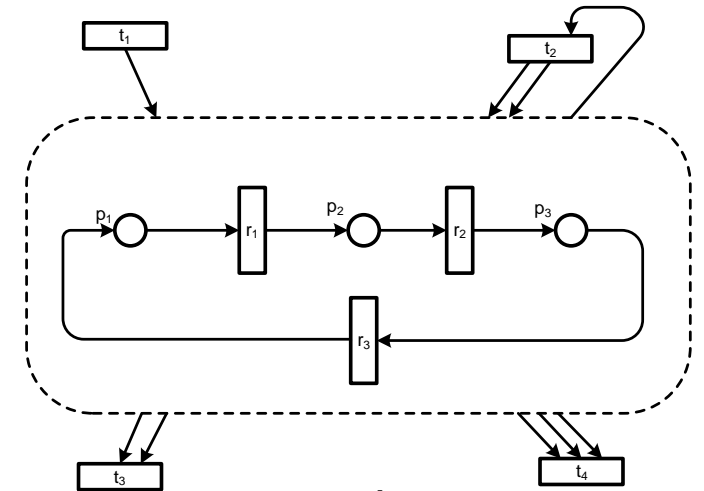
Подклассы сетей Петри (2/3)

Теорема Н1. Преобразование Хака сохраняет живость, ограниченность, консервативность.

Язык $L(N)$ состоит из проекций последовательностей из $L(N')$ на $T \Rightarrow$ в ординарной сети N' любой переход $t \in T \cap T'$ живой $\Leftrightarrow t$ - живой в N . Если все переходы из $T \cap T'$ живы в N' , то и все добавленные $t \in \bigcup_{p \in P} T'(p)$ живы в силу устройства кольцевых подсетей.

Т.о. ординарная сеть жива \Leftrightarrow жива исходная сеть.

Ограниченность (консервативность) следует из связи множеств $R(N)$ и $R(N')$.



В кольцевой подсети ординарной сети N' (с множеством мест $P'(p)$ и множеством переходов $T'(p)$) при срабатывании только переходов их $T'(p)$ ничто не препятствует перемещению фишек, при этом сумма фишек в местах из $P'(p)$ остается постоянной.

Если в сети N переход $t \in T$ может сработать при разметке $M \in R(N)$, то переход $t \in T \cap T'$ может сработать в сети N' при разметке $M' \in R(N') \mid \forall p \in t^+ : \sum_{p' \in P'(p)} M'(p') = M(p)$.

Т.о., если τ' - последовательность из $L(N')$, то ее проекция на T - последовательность из $L(N)$, а для любой достижимой в сети N' разметки $M' \in R(N')$ существует разметка $M \in R(N) \mid \forall p \in P: M(p) = \sum_{p' \in P'(p)} M'(p')$.

Подклассы сетей Петри (3/3)

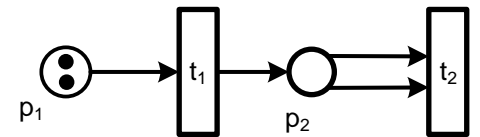
Алгоритм Хака работает и для помеченной сети (с сохранением префиксного и терминального языка), если определить помечающую функцию для ординарной сети:

$$\forall t \in T': \Sigma'(t) = \begin{cases} \Sigma(t), & t \in T \\ \lambda, & t \in T' \setminus T \end{cases}$$

Теорема Н2. Ординарные сети Петри генерируют те же классы языков \mathcal{L} , \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}^λ , \mathcal{L}_0^λ , что и сети Петри с кратными дугами.

Теорема. Класс свободных языков сетей Петри строго включает класс свободных языков ординарных сетей Петри.

$L(N) = \{t_1, t_1 t_1, t_1 t_1 t_2\}$, а для терминальной разметки $M_f = \{0, 0\}$ она порождает терминальный язык $L(N, M_f) = \{t_1 t_1 t_2\}$. Предположим, что некоторая ординарная сеть $N' = (P', T', F', M'_0)$ порождает такие языки. Тогда сеть N' имеет ровно два перехода – t_1 и t_2 .



1) Если $t_2^- = \emptyset$ или $\forall p \in t_2^- : M'_0(p) > 0$, то, поскольку сеть N' ординарная, в префиксном языке $L(N) = L(N')$ должно содержаться слово, начинающееся символом перехода t_2 , а это не так.

2) Если $\exists p \in t_2^- : M'_0(p) = 0$, то возможны 2 случая (ниже $P_0(t_2)$ – множество входных мест t_2 с разметкой 0):

2.1) $\exists p \in P_0(t_2) \mid p \notin t_2^+$. Нулевую разметку p не меняет ни t_1 , ни $t_2 \Rightarrow t_2$ мертвый и $t_1 t_1 t_2 \notin L(N') = L(N)$.

2.2) $P_0(t_2) \subseteq t_1^-$, тогда $L(N')$ должен содержать $t_1 t_2$ (т.к. сеть N' – ординарная).

Coloured Petri nets (CPN)

